EGMO 2017 Zürich

Language: **Arabic (Tunisian)**

Day: 2

السؤال الرابع

ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً و لتكن $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ أعداداً صحيحة موجبة. في مجموعة من $t_n + 1$ شخص، لُعبت بينهم بعض مباريات الشطرنج. يستطيع كل شخصين أن يلعبا مع بعضهما البعض مرة واحدة على الأكثر. أثبت أنه من الممكن أن يتحقق الشرطان التاليان في آن واحد:

(i) عدد المباريات التي يلعبها كل شخص واحدة من $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) لكل عدد i بحيث $1 \leq i \leq n$، يوجد شخص ما لعب بالضبط t_i مباراة شطرنج.

السؤال الخامس

ليكن $n \geq 2$ عدداً صحيحاً. يقال أن العديدات n $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ من الأعداد الصحيحة الموجبة قطعاً (التي ليست بالضرورة مختلفة) "مُكلفة" إذا وُجد عدد صحيح موجب قطعاً k بحيث:

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\ldots(a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}$$

(أ) أوجد كل الأعداد الصحيحة $n \geq 2$ بحيث يوجد عديدات n "مُكلفة".

(ب) أثبت أن لكل عدد فردي موجب m يوجد عدد صحيح $n \geq 2$ بحيث m تنتمي لإحدى العديدات n "مُكلفة".

يوجد بالضبط n عوامل في الجذاء من الطرف الأيسر من المعادلة.

السؤال السادس

ليكن المثلث ABC حاد الزوايا و ليس فيه ضلعين متقايسين. نظير كلاً من مركز الثقل G و مركز الدائرة المحيطة O بالمثلث ABC وفق أضلاعه $[BC], [CA], [AB]$ نرمز له G_1, G_2, G_3 و O_1, O_2, O_3 على التوالي. اثبت أن الدوائر المحيطة بالمثلثات $ABC, O_2O_3A, O_1O_3B, O_1O_2C, G_2G_3A, G_1G_3B, G_1G_2C$ تمر في نقطة واحدة.

Language: ARABIC - Tunisia

مدة الاختبار 4 ساعات ونصف

كل سؤال 7 نقاط