E diel, 9 Prill, 2017

Problemi 4. Jepet numri i plotë $n \geq 1$ dhe numrat e plotë pozitivë $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Një grup prej $t_n + 1$ personash, luajnë lojëra shahu me njëri -tjetrin. Çdo dy persona luajnë me njëri-tjetrin të shumtën 1 lojë. Provoni që është e mundur të plotësohen njëherësh të dy kushtet e mëposhtme:

(i) Numri i lojërave të kryera nga çdo person është një prej numrave $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Për çdo i ku $1 \leq i \leq n$, gjendet një prej tyre që ka kryer ekzaktësisht t_i lojëra shahu.

Problemi 5. Jepet numri i plotë $n \geq 2$. Një n-she e renditur numrash të plotë pozitivë $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jo domosdoshmërisht të ndryshëm quhet *e shtrenjtë* në qoftë se gjendet një numër i plotë pozitiv k i tillë që

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \cdots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Gjeni të gjithë numrat e plotë pozitivë $n \geq 2$ për të cilët gjendet një n-she e shtrenjtë.

b) Provoni se për çdo numër të plotë pozitiv tek m gjendet një numër i plotë $n \geq 2$ i tillë që m t'i përkasë një n-sheje të shtrenjtë.

Gjenden ekzaktësisht n faktorë në prodhimin e anës së majtë.

Problemi 6. Jepet një trekëndësh këndngushtë ABC në të cilin çdo dy brinjë të tij kanë gjatësi të ndryshme. Pikat simetrike të centroidit G dhe të qendrës O së rrethit të jashtëshkruar trekëndëshit ABC në lidhje me brinjët BC, CA, AB shënohen përkatësisht me G_1, G_2, G_3, dhe O_1, O_2, O_3. Vërtetoni që rrathët e jashtëshkruar trekëndëshave G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A dhe ABC kanë një pikë të përbashkët.

Centroidi i një trekëndëshi është pikëprerja e tre mesoreve të tij. Mesorja është segmenti i drejtëzës që bashkon një kulm të trekëndëshit me pikën e mesit të brinjës përballë tij.

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Çdo problem vlen 7 pikë