Субота, 8 квітня, 2017 р.

Задача 1. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, у якого $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ та $\angle ABC > \angle CDA$. Через Q і R позначимо точки на відрізках BC і CD відповідно. Пряма QR перетинає прямі AB і AD у точках P і S відповідно. Відомо, що $PQ = RS$. Через M позначимо середину відрізка BD, а через N — середину відрізка QR. Доведіть, що точки M, N, A та C лежать на одному колі.

Задача 2. Знайдіть найменше натуральне число k для якого існує розфарбування множини натуральних чисел $\mathbb{Z}_{>0}$ у k кольорів і функція $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, що одночасно задовольняє такі умови:

(i) Для довільних натуральних m, n одного кольору маємо $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Існують натуральні числа m, n такі, що $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

У розфарбуванні множини $\mathbb{Z}_{>0}$ у k кольорів кожне натуральне число пофарбовано рівно в один з k кольорів. В умовах (i) та (ii) натуральні числа m, n не обов'язково є різними.

Задача 3. На площині задано 2017 прямих так, що жодні три з них не проходять через одну точку. Турборавлик знаходиться у точці рівно на одній прямій і починає рухатися вздовж прямих за таким правилом: вона рухається по прямій доки не досягне точки перетину двох прямих. В точці перетину вона продовжує свій рух по іншій прямій повертаючи по черзі праворуч або ліворуч, змінюючи свій вибір напрямку повороту кожного разу коли досягає чергової точки перетину прямих. Напрямок руху може змінюватися тільки у точках перетину прямих. Чи могло статися так, що по деякому відрізку Турборавлик проповзла в обох напрямках упродовж своєї подорожі?

Час: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів