Sábado 8 de abril de 2017

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo que cumple que $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ y $\angle ABC > \angle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD, respectivamente, tales que la recta QR interseca las rectas AB y AD en los puntos P y S, respectivamente. Se sabe que $PQ = RS$. Sea M el punto medio de BD y sea N el punto medio de QR. Demuestra que los puntos M, N, A y C están en una misma circunferencia.

Problema 2. Encuentra el menor entero positivo k para el cual existe una coloración de los enteros positivos $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores y una función $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ que cumpla las siguientes dos propiedades:

(i) Para cualesquiera enteros positivos m, n del mismo color, $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Existen enteros positivos m, n tales que $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

En una coloración de $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colores, cada entero se colorea con exactamente uno de los k colores. Tanto en (i) como en (ii) los enteros positivos m, n no son necesariamente diferentes.

Problema 3. Se consideran 2017 rectas en el plano tales que no hay tres de ellas que pasen por el mismo punto. La hormiga Turbo se coloca en un punto de una recta (distinto de los puntos de intersección) y empieza a moverse sobre las rectas de la siguiente manera: se mueve en la recta en la que está hasta que llega al primer punto de intersección, ahí cambia de recta torciendo a la izquierda o a la derecha, alternando su elección en cada intersección a la que llega. Turbo solo puede cambiar de dirección en los puntos de intersección. ¿Puede existir un segmento de recta por el cual la hormiga viaje en ambos sentidos?

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos