sobota, 8. april 2017

Naloga 1. Naj bo $ABCD$ tak konveksen štirikotnik, da velja $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ in $\angle ABC > \angle CDA$. Naj bosta Q in R zaporedoma točki na daljicah BC in CD. Premica QR seka premici AB in AD zaporedoma v točkah P in S. Vemo, da velja $|PQ| = |RS|$. Razpolovišče daljice BD označimo z M in razpolovišče daljice QR z N. Dokaži, da točke M, N, A in C ležijo na isti krožnici.

Naloga 2. Poišči najmanjše tako naravno število k, za katerega obstajata barvanje naravnih števil $\mathbb{Z}_{>0}$ s k barvami in funkcija $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ z naslednjima dvema lastnostma:

(i) Za vsaki dve naravni števili m, n iste barve velja $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Obstajata taki dve naravni števili m, n, da velja $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Pri barvanju $\mathbb{Z}_{>0}$ s k barvami je vsako število pobarvano z natanko eno od k barv. V (i) in (ii) naravni števili m, n nista nujno različni.

Naloga 3. V ravnini leži 2017 premic tako, da se nobene tri premice ne sekajo v isti točki. Turbo polž se nahaja v točki, ki leži na natanko eni od premic, in se začne premikati vzdolž premic na sledeč način: Premika se po dani premici dokler ne prispe do presečišča dveh premic. V presečišču nadaljuje svojo pot po drugi premici tako, da zavije v levo ali v desno, pri čemer izbere smer alternirajoče v vsakem nadaljnjem presečišču, ki ga doseže. Smer premikanja spremeni le v presečiščih. Ali lahko obstaja taka daljica, po kateri polž na svoji poti potuje v obeh smereh?

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk.