



Субота, 8. април, 2017

Задатак 1. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у коме је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90^\circ$ и $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CDA$. Нека су Q и R тачке на дужима BC и CD , редом, такве да права QR сече праве AB и AD у тачкама P и S , редом. Познато је да је $PQ = RS$. Нека је M средиште дужи BD , а N средиште дужи QR . Доказати да се тачке M , N , A и C налазе на једној кружници.

Задатак 2. Наћи најмањи позитиван цијели број k , за који постоје бојење позитивних цијелих бројева $\mathbb{Z}_{>0}$ са k боја и функција $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ која задовољава сљедећа два услова:

- (i) За све позитивне цијеле бројеве m, n исте боје, вриједи: $f(m + n) = f(m) + f(n)$.
- (ii) Постоје позитивни цијели бројеви m, n такви да је: $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

Напомена: У бојењу $\mathbb{Z}_{>0}$ са k боја сваки број је обојен тачно једном бојом. У условима (i) и (ii) позитивни цијели бројеви m и n не морају бити различити.

Задатак 3. Дато је 2017 правих у равни, тако да не постоје три које пролазе кроз једну исту тачку. Пуж Турбо се налази у тачки која припада тачно једној од правих и започиње кретање по овим правима на сљедећи начин: он се креће по правој док не стигне до тачке која је пресјек двије праве, када наставља свој пут по другој правој која садржи ту пресјечну тачку (чини скретање). Када наиђе на нову пресјечну тачку неке двије праве опет врши скретање итд. Скретање врши наизмјенично (нпр. ако је код прве тачке пресека на коју је наишао скренуо десно, код друге на коју наиђе скренуће лијево, код треће десно итд.). Он може мијењати смјер кретања само у тачки пресека двије праве. Да ли постоји дио неке праве којим он може проћи у оба смјера током свог путовања?

Language: Serbian(BiH)

Вријеме: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем вриједи 7 бодова