



subota, 8. april 2017.

Zadatak 1. Neka je $ABCD$ konveksni četvorougao sa $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ i $\angle ABC > \angle CDA$. Date su tačke Q i R na dužima BC i CD , respektivno, tako da prava QR seče prave AB i AD u tačkama P i S , respektivno. Neka je $PQ = RS$. Označimo sa M sredinu duži BD , a sa N sredinu duži QR . Dokazati da su tačke M , N , A i C konciklične.

Zadatak 2. Naći najmanji prirodan broj k za koji postoje bojenje skupa prirodnih brojeva \mathbb{N} sa k boja i funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tako da su zadovoljena sledeća dva uslova:

- (i) Za svaka dva prirodna broja m, n koji su iste boje, $f(m + n) = f(m) + f(n)$.
- (ii) Postoje prirodni brojevi m, n tako da $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

U bojenju skupa \mathbb{N} sa k boja, svaki prirodan broj je obojen tačno jednom od k boja. I u uslovu (i) i u uslovu (ii), prirodni brojevi m, n ne moraju biti različiti.

Zadatak 3. Dato je 2017 pravih u ravni tako da nijedne tri ne prolaze kroz istu tačku. Puž Turbo nalazi se u tački koja leži na tačno jednoj od datih pravih, i počinje da se kreće po datim pravama na sledeći način: Ide po pravoj dok ne naide na presek dve prave. Na preseku nastavlja kretanje po drugoj pravoj, skrenuvši ili levo ili desno, i alternirajući taj svoj izbor na svakom sledećem skretanju. Dakle, i pravac i smer kretanja puža menja se samo u tačkama preseka datih pravih. Da li je moguće da postoji duž po kojoj se puž kretao u oba smera?