EGMO 2017 Zürich

Language: **Romanian**

Day: **1**

Sâmbătă, 8 aprilie 2017

Problema 1. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ şi $\angle ABC > \angle CDA$. Fie Q şi R puncte pe segmentele BC şi, respectiv, CD, astfel încât dreapta QR intersectează dreptele AB şi AD în punctele P şi, respectiv, S. Se ştie că $PQ = RS$. Fie M mijlocul lui BD şi N mijlocul lui QR. Demonstraţi că punctele M, N, A şi C sunt pe un cerc.

Problema 2. Determinaţi cel mai mic întreg pozitiv k pentru care există o colorare cu k culori a mulţimii întregilor strict pozitivi $\mathbb{Z}_{>0}$ şi o funcţie $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ cu următoarele proprietăţi:

(i) Pentru orice întregi strict pozitivi m, n de aceeaşi culoare, $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Există întregii pozitivi m, n astfel încât $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

Într-o colorare cu k culori a mulţimii $\mathbb{Z}_{>0}$, fiecare întreg este colorat cu exact una dintre cele k culori. Atât în (i) cât şi în (ii), întregii m, n nu sunt neapărat diferiţi.

Problema 3. În plan sunt trasate 2017 drepte, astfel încât nu există printre ele trei care să treacă prin acelaşi punct. Melcul Turbo stă într-un punct situat pe exact una dintre aceste drepte şi începe să se târască de-a lungul dreptelor în următorul mod: se mişcă pe una dintre dreptele date până când ajunge la o intersecţie de două drepte. La intersecţie îşi continuă drumul pe cealaltă dreaptă, întorcându-se la stânga sau la dreapta şi alternând alegerea la fiecare intersecţie la care ajunge. Turbo îşi schimbă direcţia de deplasare doar când ajunge la un punct de intersecţie. Poate exista un segment de dreaptă pe care melcul să-l parcurgă în ambele direcţii?