



*Sábado, 8 de abril de 2017*

**Problema 1.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo com  $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$  e  $\angle ABC > \angle CDA$ . Sejam  $Q$  e  $R$  pontos sobre os segmentos  $BC$  e  $CD$ , respectivamente, tais que a reta  $QR$  intersecta as retas  $AB$  e  $AD$  nos pontos  $P$  e  $S$ , respectivamente. É dado que  $PQ = RS$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $BD$  e seja  $N$  o ponto médio de  $QR$ . Prove que os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $A$  e  $C$  estão sobre uma mesma circunferência.

**Problema 2.** Encontre o menor inteiro positivo  $k$  para o qual existe uma coloração dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}_{>0}$  com  $k$  cores e uma função  $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  com as seguintes duas propriedades:

- (i) Para todos inteiros positivos  $m, n$  de mesma cor,  $f(m + n) = f(m) + f(n)$ .
- (ii) Há dois inteiros positivos  $m, n$  tais que  $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$ .

*Em uma coloração de  $\mathbb{Z}_{>0}$  com  $k$  cores, todo inteiro é pintado com exatamente uma das  $k$  cores. Em ambas propriedades (i) e (ii) os inteiros positivos  $m, n$  não são necessariamente diferentes.*

**Problema 3.** Há 2017 retas no plano tais que não existem três que passam por um mesmo ponto. Turbo, a caracol, está sobre um ponto em exatamente uma das retas e começa a se mover sobre as retas da seguinte maneira: ela se move em uma dada reta até encontrar uma intersecção de duas retas. Na intersecção, ela segue sua jornada virando à direita ou à esquerda, alternando sua escolha a cada intersecção que ela atinge. Ela só pode mudar de sentido nos pontos de intersecção. Pode existir um segmento de reta através do qual ela passa em ambos os sentidos durante a sua jornada?