sobota, 8 kwietnia 2017 r.

Zadanie 1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą zależności $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ oraz $\angle ABC > \angle CDA$. Punkty Q i R leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD. Prosta QR przecina proste AB i AD odpowiednio w punktach P i S. Przypuśćmy, że $PQ = RS$. Punkt M jest środkiem odcinka BD, a punkt N — środkiem odcinka QR. Udowodnić, że punkty M, N, A i C leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą $k > 0$, dla której istnieje kolorowanie zbioru $\mathbb{Z}_{>0}$ wszystkich dodatnich liczb całkowitych k kolorami oraz funkcja $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ o następujących dwóch własnościach:

(i) Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n tego samego koloru zachodzi równość $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Uwaga. W kolorowaniu zbioru $\mathbb{Z}_{>0}$ za pomocą k kolorów każda liczba jest pokolorowana dokładnie jednym z k kolorów. Zarówno w (i) jak i w (ii) liczby m, n są niekoniecznie różne.

Zadanie 3. Na płaszczyźnie danych jest 2017 prostych, przy czym żadne trzy z nich nie mają punktu wspólnego. Ślimaczyca Turbina na początku znajduje się w punkcie leżącym na dokładnie jednej z danych prostych. Następnie zaczyna pełzać w następujący sposób: porusza się wzdłuż prostej aż natrafi na punkt przecięcia dwóch prostych. W tym momencie kontynuuje wędrówkę wzdłuż drugiej prostej, skręcając w prawo lub lewo. Przy każdym następnym napotkanym punkcie przecięcia dwóch prostych skręca w drugą stronę niż przy poprzedniej zmianie kierunku. Turbina może zmieniać kierunek wyłącznie w punkcie przecięcia dwóch danych prostych (nie może więc stanąć w miejscu i zawrócić). Czy może się zdarzyć, że Turbina podczas swej wędrówki przemierzy pewien odcinek w obu kierunkach?

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.