EGMO
2017
Zürich

Language: **Norwegian**

Day: **1**

Lørdag 8. april 2017

Oppgave 1. La $ABCD$ være en konveks firkant med $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ og $\angle ABC > \angle CDA$. La Q og R være punkter på linjestykkene BC henholdsvis CD, og la linjen QR skjære linjen AB i et punkt P, og linjen AD i et punkt S. Vi får oppgitt at $PQ = RS$. La midtpunktet på BD være M, og midtpunktet på QR være N. Vis at punktene M, N, A og C ligger på én sirkel.

Oppgave 2. Finn det minste positive heltallet k for hvilket det finnes en fargelegging av de positive heltallene $\mathbb{Z}_{>0}$ i k farger samt en funksjon $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ med følgende to egenskaper:

(i) For alle positive heltall m, n av samme farge gjelder $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Det finnes positive heltall m, n slik at $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

I en fargelegging av $\mathbb{Z}_{>0}$ i k farger farges hvert heltall i ett av de k fargene. Det kreves i hverken (i) eller (ii) at de positive heltallene m, n skal være forskjellige.

Oppgave 3. I planet trekkes 2017 linjer slik at ingen tre av dem går gjennom samme punkt. Sneglen Turbo starter i et punkt på én av linjene og begynner å gli langs linjene på følgene måte: den beveger seg langs en gitt linje inntil den når et skjæringspunkt mellom to linjer. Fra skjæringspunktet fortsetter den ferden langs den kryssende linjen enten mot venstre eller høyre, med alternerende valg ved hvert skjæringspunkt. Turbo kan bare endre retning ved et skjæringspunkt. Kan det finnes et linjestykke Turbo glir langs i begge retninger i løpet av ferden?

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng