



Сабота, 8 април, 2017

Проблем 1. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ и $\angle ABC > \angle CDA$. Нека Q и R се точки од отсечките BC и CD , соодветно, при што правата QR ги сече правите AB и AD во точките P и S , соодветно. Притоа $PQ = RS$. Нека средната точка на отсечката BD е M а средната точка на отсечката QR е N . Докажи дека точките M, N, A и C лежат на иста кружница.

Проблем 2. Да се најде најмалиот позитивен цел број k за кој постои боење на позитивните цели броеви $\mathbb{Z}_{>0}$ со k бои и функција $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ која ги исполнува следните два услови:

(i) За секои позитивни цели броеви m и n кои се обоени со иста боја е исполнето

$$f(m+n) = f(m) + f(n)$$

(ii) Постојат позитивни цели броеви m и n такви што $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Под боење на $\mathbb{Z}_{>0}$ со k бои се подразбира дека секој позитивен цел број е обоен со точно една боја од k различни бои. И во условот (i) и во условот (ii) позитивните цели броеви не мора да се различни.

Проблем 3. Дадени се 2017 прави кои лежат во една рамнина така што било кои три од нив не минуваат низ иста точка. Полжавот Турбо се наоѓа во точка која лежи на точно една од дадените прави и почнува да се движи по правите на следниот начин: оди по правата додека не најде на точка на пресек на две прави. Во пресечната точка до која стигнал го продолжува движењето свртувајќи или лево или десно по другата права, и продолжувајќи го движењето истото го повторува во секоја наредна пресечна точка до која стигнува. Значи и правецот и насоката на движењето го менува само во точките на пресек на две прави. Дали е можно да постои отсечка по која полжавот се движел во двете насоки при неговото патување?