2017 m. balandžio 8 d., šeštadienis

1 uždavinys. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kampai tenkina sąlygas $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ ir $\angle ABC > \angle CDA$. Atkarpose BC ir CD atitinkamai pažymėti taškai Q ir R, o tiesė QR kerta tieses AB ir AD atitinkamai taškuose P ir S. Be to, $PQ = RS$. Atkarpos BD vidurio taškas pažymėtas M, o atkarpos QR vidurio taškas pažymėtas N. Įrodykite, kad taškai M, N, A ir C priklauso vienam apskritimui.

2 uždavinys. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių k, kuriam egzistuoja visų natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}_{>0}$ nuspalvinimas, panaudojant k spalvų, ir funkcija $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, tenkinantys šias dvi sąlygas:

(i) kiekvienai tos pačios spalvos natūraliųjų skaičių porai m, n galioja $f(m+n) = f(m) + f(n)$;

(ii) egzistuoja tokie natūralieji m, n, kad $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Aibės $\mathbb{Z}_{>0}$ nuspalvinimas reiškia, kad kiekvienas natūralusis skaičius nuspalvinamas lygiai viena iš k spalvų. Abiejose sąlygose (i) ir (ii) skaičiai m, n gali būti lygūs.

3 uždavinys. Plokštumoje nubrėžta 2017 tiesių, iš kurių jokios trys nesikerta viename taške. Taške, priklausančiame lygiai vienai tiesei, tupi Turbosraigė. Ji ima šliaužti nubrėžtomis tiesėmis tokiu būdu: tiese, kurioje tuo metu yra, ji šliaužia, kol pasiekia dviejų tiesių sankirtą. Kiekvienoje sankirtoje ji ima šliaužti kita tiese, pasukusi į kairę arba į dešinę; kaskart jos pasirinkimas (sukti į kairę arba į dešinę) yra priešingas nei praeitą kartą. Turbosraigė keičia judėjimo kryptį tik tiesių sankirtose. Ar gali atsirasti tokia tiesės atkarpa, kuria Turbosraigė kelionės metu bus šliaužusi abiem kryptimis?

Darbo laikas: 4 val. 30 min.
Kiekvieno uždavinio vertė yra 7 taškai