2017 年 *4* 月 *8* 日 土曜日

問題 1. 凸四角形 $ABCD$ は $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ABC > \angle CDA$ をみたしている．Q, R はそれぞれ線分 BC, CD 上の点であり，直線 QR は直線 AB, AD とそれぞれ P, S で交わっている．BD の中点を M, QR の中点を N とする．$PQ = RS$ が成り立っているとき，4 点 M, N, A, C は同一円周上にあることを示せ．

問題 2. $\mathbb{Z}_{>0}$ で正の整数全体からなる集合を表す．正の整数 k であって，次をみたすもののうち最小のものを求めよ．

$\mathbb{Z}_{>0}$ を k 色で塗り分ける方法と関数 $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して以下をみたす：

(i) 同じ色で塗られた任意の正の整数 m, n に対して，$f(m+n) = f(m) + f(n)$ が成立する．

(ii) 正の整数 m, n であって，$f(m+n) \neq f(m) + f(n)$ をみたすものが存在する．

ただし，$\mathbb{Z}_{>0}$ を k 色で塗り分けるとは，各正の整数に対して k 色のうちの 1 つを割り当てることである．また，条件 (i) と (ii) のいずれにおいても，正の整数 m と n は相異なる必要はない．

問題 3. 平面上にどの 3 直線も 1 点で交わらないような 2017 本の直線がある．かたつむり君ははじめある直線上の交点でない点にいて，以下の条件をみたすように直線上を動く：かたつむり君は 2 直線の交点に達するまでは直線に沿って動き，交点に達すると左または右に曲がる．曲がる方向は左右が交互になるようにする．交点以外では動く方向を変えないとする．

このとき，一度通った線分を逆向きにもう一度通ることはありうるか．

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点