EGMO 2017 Zürich

Language: **Italian**

Day: **1**

Sabato, 8 aprile 2017

Problema 1. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ e $\angle ABC > \angle CDA$. Siano Q un punto sul segmento BC ed R un punto sul segmento CD; chiamiamo P ed S i punti di intersezione della retta QR con le rette AB e AD, rispettivamente. È noto che $PQ = RS$. Siano M il punto medio del segmento BD ed N il punto medio del segmento QR. Dimostrare che i punti M, N, A e C sono conciclici.

Problema 2. Trovare il più piccolo intero positivo k per il quale esistono una colorazione con k colori dell'insieme $\mathbb{Z}_{>0}$ degli interi positivi e una funzione $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ con le seguenti due proprietà:

(i) per ogni m, n interi positivi dello stesso colore si ha $f(m+n) = f(m) + f(n)$;

(ii) esistono m, n interi positivi tali che $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Una colorazione di $\mathbb{Z}_{>0}$ con k colori consiste nell'assegnare a ciascun intero positivo esattamente uno dei k colori. Inoltre, in (i) e in (ii) gli interi positivi m, n non sono necessariamente distinti.

Problema 3. Sono date 2017 rette nel piano, a tre a tre non concorrenti. Una lumachina si trova inizialmente in un punto che appartiene a una sola delle rette e da lì inizia a strisciare lungo le rette nella maniera seguente: si muove su una data retta finché non raggiunge un'intersezione. Arrivata all'intersezione, prosegue il suo viaggio sull'altra retta girando a sinistra o a destra, alternando la sua scelta ad ogni punto d'intersezione che incontra. I punti d'intersezione sono gli unici in cui la lumachina può cambiare direzione. È possibile che vi sia un segmento che, nel corso del viaggio, la lumachina attraversa in entrambe le direzioni?

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti