



יום שבת, 8 באפריל, 2017

**שאלה 1.** יהא  $ABCD$  מרובע קמור עם  $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90^\circ$  וכן  $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CDA$ . תהא  $Q$ -ו- $R$  נקודות על הקטעים  $BC$ -ו- $CD$ , בהתאמה, כך שהישר  $QR$  נחתך עם הישרים  $AB$ -ו- $AD$  בנקודות  $P$ -ו- $S$ , בהתאמה. נתון כי  $PQ = RS$ . נסמן את אמצע הקטע  $BD$  ב- $M$  ואת אמצע הקטע  $QR$  ב- $N$ . הוכיחי כי הנקודות  $M, N, A, C$  נמצאות על מעגל אחד.

**שאלה 2.** מצאי את השלם החיובי הקטן ביותר  $k$  עבורו קיימות צביעה של השלמים החיוביים  $\mathbb{Z}_{>0}$  ב- $k$  צבעים ופונקציה  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  בעלות שתי התכונות הבאות:

$$(i) \quad \text{לכל שני שלמים חיוביים } m, n \text{ הצבועים באותו הצבע, מתקיים } f(m+n) = f(m) + f(n)$$

$$(ii) \quad \text{קיימים שלמים חיוביים } m, n \text{ עבורם } f(m+n) \neq f(m) + f(n)$$

(בצביעה של  $\mathbb{Z}_{>0}$  ב- $k$  צבעים, כל שלם חיובי צבוע בבדיוק אחד מ- $k$  הצבעים. בשתי התכונות (i), (ii) לעיל, השלמים החיוביים  $m, n$  לא חייבים להיות שונים זה מזה.)

**שאלה 3.** נתונים 2017 ישרים במישור, כך שאף שלושה לא עוברים דרך נקודה אחת. טורבו החלזון יושבת על נקודה כלשהי על בדיוק אחד הישרים, ומתחילה להחליק לאורך הישרים באופן הבא: היא נעה לאורך הישר עליו היא נמצאת עד שהיא מגיעה להצטלבות עם ישר אחר. בהצטלבות היא ממשיכה את מסעה לאורך הישר האחר תוך פנייה שמאלה או ימינה, ובכל הצטלבות היא משנה את בחירת כיוון הפנייה, לסירוגין. טורבו יכולה לשנות את כיוון תנועתה רק בנקודות ההצטלבות. האם ייתכן שקיים קטע אשר טורבו מחליקה לאורכו בשני הכיוונים האפשריים במהלך מסעה?