EGMO 2017 Zürich

Language: **Greek**

Day: **1**

Σάββατο, Απρίλης 8, 2017

Πρόβλημα 1. Ας είναι $ABCD$ ένα κυρτό τετράπλευρο με $\angle DAB = \angle BCD = 90^0$ και $\angle ABC > \angle CDA$. Ας είναι Q και R σημεία των ευθύγραμμων τμημάτων BC και CD, αντίστοιχα, έτσι ώστε η ευθεία QR τέμνει τις ευθείες AB και AD στα σημεία P και S, αντίστοιχα. Δίνεται ότι $PQ = RS$. Το σημείο M είναι το μέσο του BD και το N το μέσο του QR. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M, N, A και C βρίσκονται σε ένα κύκλο.

Πρόβλημα 2. Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο k για τον οποίο υπάρχει ένας χρωματισμός των θετικών ακεραίων $\mathbf{Z}_{>0}$ με k χρώματα και μια συνάρτηση $f : \mathbf{Z}_{>0} \to \mathbf{Z}_{>0}$ με τις πιο κάτω δύο ιδιότητες :

(i) Για όλους τους θετικούς ακέραιους m, n που έχουν το ίδιο χρώμα, $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m, n έτσι ώστε $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Στο χρωματισμό των $\mathbf{Z}_{>0}$ με k χρώματα, κάθε ακέραιος χρωματίζεται με ένα ακριβώς από τα k χρώματα. Και στις δύο ιδιότητες (i) και (ii) οι θετικοί ακέραιοι m, n δεν είναι κατανάγκη διαφορετικοί.

Πρόβλημα 3. Υπάρχουν 2017 ευθείες στο επίπεδο έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρεις ευθείες που να παιρνούν από το ίδιο σημείο. Το σαλιγκάρι Turbo κάθεται σε ένα σημείο σε ακριβώς μία ευθεία και αρχίζει να γλυστρά κατά μήκος των ευθειών με τον εξής τρόπο: κινείται στην ίδια ευθεία μέχρι να φτάσει σε σημείο που τέμνονται δύο ευθείες. Στο σημείο τομής, συνεχίζει το ταξίδι του σε άλλη ευθεία στρίβοντας δεξιά ή αριστερά, αλλάζοντας την επιλογή του (από δεξιά σε αριστερά ή από αριστερά σε δεξιά) σε κάθε σημείο που συναντά. Αλλάζει κατεύθυνση μόνο στα σημεία τομής. Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του, μπορεί να υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο να πέρασε και από τις δύο κατευθύνσεις;

Γλώσσα: Ελληνικά

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες