



Samstag, 8. April 2017

Aufgabe 1. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ und $\angle ABC > \angle CDA$. Weiter seien Q respektive R Punkte auf den Strecken BC respektive CD , sodass die Gerade QR die Geraden AB respektive AD in den Punkten P respektive S schneidet. Zusätzlich soll $PQ = RS$ gelten. Sei M der Mittelpunkt der Strecke BD und N der Mittelpunkt der Strecke QR . Zeige, dass die Punkte M, N, A und C auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 2. Finde die kleinste positive ganze Zahl k für welche eine Färbung der positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_{>0}$ mit k Farben und eine Funktion $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ mit den folgenden zwei Eigenschaften existieren:

- (i) Für alle positiven ganzen Zahlen m, n mit der gleichen Farbe gilt $f(m + n) = f(m) + f(n)$.
- (ii) Es existieren positive ganze Zahlen m, n , sodass $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

In einer Färbung von $\mathbb{Z}_{>0}$ mit k Farben ist jede ganze Zahl mit genau einer der k Farben gefärbt. In (i) und (ii) sind die positiven ganzen Zahlen m, n nicht notwendigerweise verschieden.

Aufgabe 3. Es seien 2017 Geraden in der Ebene, sodass sich keine drei Geraden in einem Punkt schneiden. Die Schnecke Turbo sitzt auf einem Punkt, welcher auf genau einer der Geraden liegt, und beginnt auf folgende Art und Weise den Geraden entlang zu kriechen: sie bewegt sich entlang einer Geraden bis sie einen Schnittpunkt zweier Geraden erreicht. Bei diesem Schnittpunkt setzt sie ihre Reise auf der anderen Geraden fort und kriecht abwechselungsweise nach links oder nach rechts; sie wechselt also bei jedem Schnittpunkt ihre Richtungswahl. Sie kann die Richtung nur an Schnittpunkten wechseln. Kann es eine Strecke geben, entlang welcher sie während ihrer Reise in beiden Richtungen kriecht?