



Samedi 8 avril 2017

Problème 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ et $\widehat{ABC} > \widehat{CDA}$. Soient Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$ et $[CD]$, tels que la droite QR coupe les droites AB et AD respectivement aux points P et S , de sorte que $PQ = RS$. Soit M le milieu du segment $[BD]$ et N celui du segment $[QR]$. Montrer que les points M , N , A et C appartiennent à un même cercle.

Problème 2. Trouver le plus petit entier strictement positif k pour lequel il existe un coloriage à k couleurs des entiers strictement positifs $\mathbb{Z}_{>0}$ et une fonction $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i) Pour tous les entiers strictement positifs m et n de même couleur, $f(m+n) = f(m) + f(n)$.
- (ii) Il existe des entiers strictement positifs m et n tels que $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Dans un coloriage à k couleurs de $\mathbb{Z}_{>0}$, chaque entier est colorié en une et une seule des k couleurs. Dans les deux conditions (i) et (ii), les entiers strictement positifs m et n ne sont pas nécessairement distincts.

Problème 3. Soient 2017 droites dans le plan telles qu'il n'en existe pas trois s'intersectant en un même point. Turbo l'escargot se trouve sur un point n'appartenant qu'à une seule droite. Il se déplace le long des droites de la façon suivante. Il se meut sur une droite donnée jusqu'à ce qu'il arrive à une intersection. À chaque fois qu'il rencontre une intersection, il continue son parcours sur l'autre droite, tournant à gauche ou à droite, alternant son choix à chaque intersection rencontrée. Aucun demi-tour n'est permis. Est-il possible qu'il parcoure un même segment de droite dans deux sens opposés durant son parcours ?