



*Lauantaina 8 huhtikuuta 2017*

**Tehtävä 1.** Olkoon  $ABCD$  konvekssi nelikulmio, jolle  $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$  ja  $\angle ABC > \angle CDA$ . Olkoot  $Q$  ja  $R$  janojen  $BC$  ja  $CD$  pisteitä, tässä järjestyksessä, niin, että suora  $QR$  leikkaa suorat  $AB$  ja  $AD$  pisteissä  $P$  ja  $S$ , tässä järjestyksessä. Lisäksi  $PQ = RS$ . Olkoon janan  $BD$  keskipiste  $M$  ja janan  $QR$  keskipiste  $N$ . Osoita, että pisteet  $M$ ,  $N$ ,  $A$  ja  $C$  ovat samalla ympyrällä.

**Tehtävä 2.** Etsi pienin positiivinen kokonaisluku  $k$ , jota kohti on olemassa positiivisten kokonaislukujen  $\mathbb{Z}_{>0}$   $k$ -värin väritys ja funktio  $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ , joka toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

- (i) Kaikille positiivisille kokonaisluvuille  $m, n$ , jotka ovat samanväriset, pätee  $f(m + n) = f(m) + f(n)$ .
- (ii) On olemassa positiiviset kokonaisluvut  $m, n$ , joille  $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$ .

*Joukon  $\mathbb{Z}_{>0}$   $k$ -värin värityksessä jokainen kokonaisluku väritetään täsmälleen yhdellä  $k$ :sta väristä. Positiiviset kokonaisluvut  $m, n$  eivät ole välttämättä erisuuret kummassakaan ehdoista (i) tai (ii).*

**Tehtävä 3.** Tasossa on 2017 suoraa, joista mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Turbo etana istuu täsmälleen yhdellä näistä suorista ja alkaa liukua suoraa pitkin seuraavalla tavalla: se liikkuu annetulla suoralla kunnes se saavuttaa kahden suoran leikkauspisteen. Leikkauspisteessä se päättää jatkaa matkaa toiselle suoralle kääntymällä oikealle tai vasemmalle ja vaihtaa kääntösuuntaansa jokaisessa leikkauspisteessä. Se voi vaihtaa suuntaansa vain leikkauspisteissä. Voiko olla olemassa jana, jonka se kulkee molempiin suuntiin matkansa aikana?