EGMO 2017 Zürich

Language: **Dutch**

Day: **1**

Zaterdag 8 april 2017

Opgave 1. Zij $ABCD$ een convexe vierhoek met $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ en $\angle ABC > \angle CDA$. Laat Q en R punten zijn op respectievelijk lijnstukken BC en CD, zodat de lijn QR de lijnen AB en AD snijdt in respectievelijk P en S. Gegeven is dat $|PQ| = |RS|$. Zij M het midden van BD en N het midden van QR. Bewijs dat de punten M, N, A en C op één cirkel liggen.

Opgave 2. Bepaal het kleinste positieve gehele getal k waarvoor er een kleuring van de positieve gehele getallen $\mathbb{Z}_{>0}$ met k kleuren en een functie $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ bestaan met de volgende twee eigenschappen:

(i) Voor alle positieve gehele getallen m, n met dezelfde kleur geldt $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Er bestaan positieve gehele getallen m, n zodat $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

Bij een kleuring van $\mathbb{Z}_{>0}$ met k kleuren wordt elk positief geheel getal gekleurd in precies één van de k kleuren.
In zowel (i) als (ii) hoeven de positieve gehele getallen m, n niet noodzakelijk verschillend te zijn.

Opgave 3. In het vlak bevinden zich 2017 lijnen, waarbij geen drie lijnen door hetzelfde punt gaan. Turbo de slak zit op een punt op precies één van de lijnen en begint over de lijnen te glijden, namelijk op de volgende manier: ze beweegt over een bepaalde lijn totdat ze een snijpunt van twee lijnen tegenkomt. Vanaf het snijpunt vervolgt ze haar weg over de andere lijn, waarbij ze linksaf of rechtsaf slaat; ze kiest hierbij om en om voor links en rechts. Behalve bij snijpunten verandert ze nooit van glijrichting. Kan er een lijnstuk bestaan waar Turbo in beide richtingen een keer overheen glijdt gedurende haar reis?