Sobota, 8. dubna, 2017

Úloha 1. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $|\angle BAD| = |\angle BCD| = 90^\circ$ a $|\angle ABC| > > |\angle ADC|$. Nechť Q a R jsou body postupně na úsečkách BC a CD takové, že přímka QR protíná přímky AB a AD postupně v bodech P a S a platí $|PQ| = |RS|$. Dokažte, že střed M úsečky BD, střed N úsečky QR a body A a C leží na společné kružnici.

Úloha 2. Určete nejmenší kladné celé číslo k, pro které existuje obarvení kladných celých čísel $\mathbb{Z}_{>0}$ pomocí k barev, a funkci $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) Pro všechna kladná celá čísla m, n stejné barvy platí $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Existují kladná celá čísla m, n taková, že $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

Při obarvování množiny $\mathbb{Z}_{>0}$ pomocí k barev je každé číslo obarveno právě jednou z těchto barev. V obou případech (i) a (ii) kladná celá čísla m, n nejsou nutně různá.

Úloha 3. V rovině je dáno 2017 přímek takových, že žádné tři z nich neprochází jedním bodem. Hlemýžď Turbo se nachází v nějakém bodě právě jedné z daných přímek a začíná se pohybovat po těchto přímkách podle následujícího pravidla: Pohybuje se po dané přímce do doby, dokud nedorazí do průsečíku dvou daných přímek. Od tohoto průsečíku pokračuje v pohybu po jiné přímce, přičemž se vydá doprava, nebo doleva, a to střídavě v po sobě následujících průsečících přímek. Směr může měnit jedině v průsečících daných přímek. Existuje nějaká úsečka na některé z daných přímek, po které se pohybuje v obou směrech během své cesty?