



*Събота, 8 април, 2017*

**Задача 1.** Даден е изпъкнал четириъгълник  $ABCD$ , за който  $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$  и  $\angle ABC > \angle CDA$ . Точките  $Q$  и  $R$  са съответно от отсечките  $BC$  и  $CD$ , като правата  $QR$  пресича правите  $AB$  и  $AD$  съответно в точки  $P$  и  $S$ . Дадено е, че  $PQ = RS$ . Средата на отсечката  $BD$  е означена с  $M$ , а средата на отсечката  $QR$  е означена с  $N$ . Да се докаже, че точките  $M$ ,  $N$ ,  $A$  и  $C$  лежат на една окръжност.

**Задача 2.** Да се намери най-малкото естествено число  $k$ , за което съществува оцветяване на естествените числа  $\mathbb{Z}_{>0}$  в  $k$  цвята и функция  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ , за които са изпълнени следните две условия:

- (i) За всеки две естествени числа  $m$  и  $n$ , които са оцветени в един и същи цвят, е изпълнено  $f(m+n) = f(m) + f(n)$ .
- (ii) Съществуват естествени числа  $m$  и  $n$ , за които  $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$ .

*В оцветяване на  $\mathbb{Z}_{>0}$  в  $k$  цвята, всяко число е оцветено в точно един от дадените  $k$  цвята. В (i) и (ii) естествените числа  $m$  и  $n$  може да бъдат равни.*

**Задача 3.** В равнината са дадени 2017 прави, никои три от които не се пресичат в една точка. Охлювът „Турбо“ се намира върху точно една от дадените прави и започва да се движи по правите по следния начин: придвижва се по дадената права до достигане на пресечна точка на тази права с някоя от другите прави. В пресечната точка охлювът започва да се движи по втората права, като завива наляво или надясно. Във всяка следваща точка охлювът променя посоката на завиване спрямо предишната точка. Той може да променя посоката на движение само в пресечните точки на правите.

Възможно ли е при това движение да съществува отсечка, по която охлювът се е движил и в двете посоки?