



Subota, 8.april, 2017

Zadatak 1. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao u kome je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90^\circ$ i $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CDA$. Neka su Q i R tačke na dužima BC i CD , redom, takve da prava QR seče prave AB i AD u tačkama P i S , redom. Poznato je da je $PQ = RS$. Neka je M središte duži BD , a N središte duži QR . Dokazati da se tačke M , N , A i C nalaze na jednoj kružnici.

Zadatak 2. Naći najmanji pozitivan cijeli broj k , za koji postoji bojenje pozitivnih cijelih brojeva $\mathbb{Z}_{>0}$ sa k boja i funkcija $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ koja zadovoljava sljedeća dva uslova:

(i) Za sve pozitivne cijele brojeve m, n iste boje, vrijedi: $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Postoje pozitivni cijeli brojevi m, n takvi da je: $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

Napomena: U bojenju $\mathbb{Z}_{>0}$ sa k boja svaki broj je obojen tačno jednom bojom. U uslovima (i) i (ii) pozitivni cijeli brojevi m i n ne moraju biti različiti.

Zadatak 3. Dato je 2017 pravih u ravni, tako da ne postoje tri koje prolaze kroz jednu istu tačku. Puž Turbo se nalazi u tački koja pripada tačno jednoj od pravih i započinje kretanje po ovim pravama na sljedeći način: on se kreće po pravoj dok ne stigne do tačke koja je presjek dvije prave, kada nastavlja svoj put po drugoj pravoj koja sadrži tu presječnu tačku (čini skretanje). Kada naiđe na novu presječnu tačku neke dvije prave, opet vrši skretanje itd. Skretanje vrši naizmjenično (npr. ako je kod prve tačke presjeka na koju je naišao skrenuo desno, kod druge na koju naiđe skrenuće lijevo, kod treće desno itd.). On može mijenjati smjer kretanja samo u tački presjeka dvije prave. Da li postoji dio neke prave, kojim on može proći u oba smjera tokom svog putovanja?

Language: Bosnian

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem vrijedi 7 bodova