EGMO 2017 Zürich

Language: **Arabic (Tunisian)**

Day: **1**

السؤال الأول:

ليكن $ABCD$ رباعي محدب بحيث $\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ و $\widehat{ABC} > \widehat{CDA}$. لتكن Q و R نقطتين من القطعتين المستقيمين $\left[BC\right]$ و $\left[CD\right]$ على التوالي، بحيث المستقيم $\left(QR\right)$ يقطع المستقيمين $\left(AB\right)$ و $\left(AD\right)$ في النقطتين P و S على التوالي. نعتبر أن $PQ = RS$. لتكن M منتصف $\left[BD\right]$ و N منتصف $\left[QR\right]$. أثبت أن النقاط M, N, A, C تقع على دائرة واحدة.

السؤال الثاني:

أوجد أصغر عدد صحيح موجب k بحيث يوجد تلوين للأعداد الصحيحة الموجبة قطعاً $\mathbb{Z}_{>0}$ باستخدام k لون ، و الدالة:

$$f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$$

لها الخواص التالية:

(i) لكل m, n الصحيحة الموجبة قطعاً التي لها نفس اللون، فإن $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(ii) يوجد m, n صحيحة موجبة قطعاً بحيث $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$.

أثناء تلوين الأعداد الصحيحة الموجبة قطعاً باستخدام k لون، كل عدد صحيح له لون واحد فقط من k لون. في كلٍ من (i) و (ii) العددين الصحيحن الموجبين قطعاً m, n ليسا بالضرورة مختلفين.

السؤال الثالث:

يوجد 2017 مستقيماً في المستوي بحيث لا يتقاطع ثلاثة منهم في نقطة واحدة. يقف الحلزون " تيربو" على نقطة في أحد المستقيمات فقط وبدأ بالتزحلق على المستقميات بالطريقة التالية: يبدأ الحركة على المستقيم المعطى حتى يصل لنقطة تقاطع مستقيمين. عند التقاطع، يتابع رحلته على المستقيم الآخر وذلك بأن يتجه يميناً أو يساراً، و يجب أن يكون اختياره للاتجاه يميناً و يساراً بالتداول عند كل نقطة تقاطع. لا يمكن للحلزون أن يغير اتجاهاته إلا عند نقاط التقاطع.

هل من الممكن أن توجد قطعة مستقيمة يمر بها في اتجاهين مختلفين خلال رحلته؟

مدة الاختبار 4 ساعات ونصف

Language: ARABIC - Tunisia

كل سؤال 7 نقاط