E shtunë, 8 Prill, 2017

Problemi 1. Në një katërkëndësh të mysët $ABCD$, $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ dhe $\angle ABC > \angle CDA$. Pikat Q dhe R ndodhen përkatësisht në brinjët BC dhe CD dhe janë të tilla që drejtëza QR pret drejtëzat AB dhe AD përkatësisht në pikat P dhe S. Dihet që $PQ = RS$. Pikat M dhe N janë përkatësisht meset e BD dhe QR. Vërtetoni se pikat M, N, A dhe C ndodhen në një rreth.

Problemi 2. Gjeni numrin e plotë pozitiv më të vogël k për të cilin gjendet një ngjyrosje e numrave të plotë pozitivë $\mathbb{Z}_{>0}$ me k ngjyra dhe një funksion $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ që ka dy vetitë e mëposhtme:

(i) Për çdo dy numra të plotë pozitivë m, n që kanë të njëjtën ngjyrë, $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

(ii) Gjenden numrat e plotë pozitivë m, n të tillë që $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

Në një ngjyrosje të $\mathbb{Z}_{>0}$ me k ngjyra, secili prej numrave të plotë ngjyroset me vetëm njërën prej k ngjyrave. Në të dyja vetitë e dhëna më sipër (i) dhe (ii) numrat e plotë pozitivë m, n nuk janë domosdoshmërisht të ndryshëm nga njëri-tjetri.

Problemi 3. Në plan gjenden 2017 drejtëza të tilla që asnjë treshe drejtëzash nuk kalon nga e njëjta pikë. Një kërmill i quajtur Turbo qëndron në një pikë që ndodhet në vetëm një prej drejtëzave të dhëna dhe fillon të lëvizë përgjatë drejtëzave duke ndjekur rregullin e mëposhtëm: ai lëviz përgjatë një drejtëze të dhënë derisa arrin në pikëprerjen e dy drejtëzave. Në pikën e prerjes së dy drejtëzave, ai vijon të lëvizë përgjatë drejtëzës tjetër, duke alternuar zgjedhjen e tij sa herë që arrin në secilën pikë prerje. Në çdo pikëprerje që ai arrin ndryshon drejtimin (p.sh. nëse në pikëprerjen paraardhëse zgjodhi të lëvizë majtas atëherë në pikëprerjen pasardhëse zgjedh drejtimin djathtas dhe anasjelltas). A është e mundur të gjendet një segment drejtëze në të cilin ai të ketë lëvizur në të dy drejtimet gjatë udhëtimit të tij?

Koha: 4 orë dhe 30 minuta
Çdo problem vlen 7 pikë