



Language: Slovenian

Day: 2

Sreda, 13. april 2016

Naloga 4. Krožnici ω_1 in ω_2 z enakim polmerom se sekata v različnih točkah X_1 in X_2 . Krožnica ω naj se od zunaj dotika krožnice ω_1 v točki T_1 in od znotraj dotika krožnice ω_2 v točki T_2 . Dokaži, da se premici X_1T_1 in X_2T_2 sekata v točki, ki leži na krožnici ω .

Naloga 5. Naj bosta k in n taki naravni števili, da velja $k \geq 2$ in $k \leq n \leq 2k - 1$. Pravokotne ploščice, ki so vsaka velikosti $1 \times k$ ali $k \times 1$, postavljamo na $n \times n$ šahovnico tako, da vsaka ploščica pokrije natanko k polj in se nobeni dve ploščici ne prekrivata. Ploščice postavljamo, dokler ne moremo več na tak način na šahovnico postaviti nobene nove ploščice. Za vsaka taka k in n določi najmanjše možno število ploščic, ki jih lahko na koncu takšna postavitev vsebuje.

Naloga 6. Naj bo S množica vseh takih naravnih števil n , za katera je število n^4 deljivo z vsaj enim od števil $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n$. Dokaži, da S vsebuje neskončno mnogo števil vsake od oblik $7m, 7m + 1, 7m + 2, 7m + 5, 7m + 6$ in ne vsebuje števil oblike $7m + 3$ ali $7m + 4$, kjer je m celo število.