Среда, 13 апреля 2016 г.

Задача 4. Окружности ω_1 и ω_2 одинакового радиуса пересекаются в точках X_1 и X_2. Окружность ω касается окружности ω_1 внешним образом в точке T_1 и окружности ω_2 внутренним образом в точке T_2. Докажите, что прямые X_1T_1 и X_2T_2 пересекаются на окружности ω.

Задача 5. Пусть даны целые числа k и n такие, что $k \geq 2$ и $k \leq n \leq 2k-1$. На клетчатую доску размера $n \times n$ последовательно выкладывают плитки любого из двух видов $1 \times k$ и $k \times 1$ так, что каждая плитка покрывает ровно k клеток и никакие две плитки не перекрываются. Этот процесс заканчивается, когда невозможно добавить ни одной плитки. Найдите наименьшее возможное количество выложенных плиток.

Задача 6. Пусть S – множество всех положительных целых чисел n таких, что число n^4 делится хотя бы на одно из чисел n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n. Докажите, что среди элементов множества S бесконечно много чисел каждого из видов $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$ и нет ни одного числа вида $7m+3$ и вида $7m+4$, где m — целое.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов