



Language: Polish

Day: 2

Środa, 13. kwietnia 2016

Zadanie 4. Okręgi ω_1 i ω_2 mają równe promienie oraz przecinają się w różnych punktach X_1 i X_2 . Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgu ω_1 w punkcie T_1 , oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu ω_2 w punkcie T_2 . Wykazać, że proste X_1T_1 oraz X_2T_2 przecinają się w punkcie leżącym na okręgu ω .

Zadanie 5. Niech k i n będą takimi liczbami całkowitymi, że $k \geq 2$ oraz $k \leq n \leq 2k - 1$. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ ustawiamy prostokątne płytki, każda o wymiarach $1 \times k$ lub $k \times 1$, w taki sposób, by każda płytka pokrywała dokładnie k pól szachownicy oraz by żadne dwie różne płytki nie pokrywały tego samego pola. Kontynuujemy ustawianie aż do momentu, gdy nie da się już dostawić kolejnej płytki zgodnie z tymi regułami. Dla wszystkich takich k i n , wyznaczyć najmniejszą liczbę płytek jaka może występować w uzyskanym ustawieniu.

Zadanie 6. Niech S będzie zbiorem wszystkich takich dodatnich liczb całkowitych n , dla których liczba n^4 ma dzielnik wśród liczb $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n$. Udowodnić, że w zbiorze S można znaleźć nieskończenie wiele elementów każdej z postaci $7m, 7m + 1, 7m + 2, 7m + 5, 7m + 6$, lecz w S nie istnieje żaden element postaci $7m + 3$ lub $7m + 4$, gdzie m jest liczbą całkowitą.