



Language: French

Day: 2

*Mercredi 13 avril 2016*

**Problème 4.** Deux cercles  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de même rayon se coupent en deux points distincts  $X_1$  et  $X_2$ . On considère un cercle  $\omega$  tangent extérieurement à  $\omega_1$  au point  $T_1$  et tangent intérieurement à  $\omega_2$  au point  $T_2$ . Prouver que les droites  $X_1T_1$  et  $X_2T_2$  se coupent en un point appartenant à  $\omega$ .

**Problème 5.** Soient  $k$  et  $n$  deux entiers tels que  $k \geq 2$  et  $k \leq n \leq 2k - 1$ . On place des pièces rectangulaires, chacune de taille  $1 \times k$  ou  $k \times 1$ , sur un échiquier  $n \times n$ , de telle sorte que chaque pièce couvre exactement  $k$  cases et sans que deux pièces ne se chevauchent. On procède ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus ajouter de pièce de cette manière. Pour tous tels  $k$  et  $n$ , déterminer le nombre minimal de pièces qui peuvent constituer un tel recouvrement.

**Problème 6.** Soit  $S$  l'ensemble des entiers strictement positifs  $n$  tels que  $n^4$  ait un diviseur parmi les nombres  $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n$ . Prouver que l'ensemble  $S$  contient une infinité d'éléments de chacune des formes  $7m, 7m + 1, 7m + 2, 7m + 5, 7m + 6$ , mais ne contient aucun élément de la forme  $7m + 3$  ou  $7m + 4$ , où  $m$  est un entier.