Середа, 13 квітня, 2016 р.

Задача 4. Два кола ω_1 та ω_2 однакових радіусів перетинаються в різних точках X_1 та X_2. Розглянемо коло ω, що дотикається зовнішнім чином до кола ω_1 у точці T_1 та дотикається внутрішнім чином до кола ω_2 у точці T_2. Доведіть, що точка перетину прямих X_1T_1 та X_2T_2 належить колу ω.

Задача 5. Нехай k та n такі цілі числа, що $k \geq 2$ та $k \leq n \leq 2k - 1$. На дошку розміром $n \times n$ послідовно викладаються прямокутники, кожен з яких має розміри $1 \times k$ або $k \times 1$ так, що кожен прямокутник покриває рівно k клітинок на дошці і жодні два прямокутники не перекриваються один з одним. Цей процес закінчується, коли черговий прямокутник неможливо покласти у такий спосіб. Для кожного k і n визначте мінімальну кількість прямокутників, що може опинитися на дошці у кінці цього процесу.

Задача 6. Нехай S множина всіх натуральних чисел n таких, що число n^4 має хоча б один дільник у проміжку $n^2 + 1, n^2 + 2, ..., n^2 + 2n$. Доведіть, що в множині S існує нескінченно багато елементів кожного із видів $7m, 7m + 1, 7m + 2, 7m + 5, 7m + 6$ і не існує жодного елементу вигляду $7m + 3$ або $7m + 4$, де m – ціле число.

Час: 4 години 30 хвилин

Кожна задача оцінюється в 7 балів