Miercuri, 13 aprilie 2016

Problema 4. Două cercuri de raze egale ω_1 şi ω_2 se intersectează în punctele diferite X_1 şi X_2. Considerăm un cerc ω tangent exterior la cercul ω_1 în punctul T_1 şi tangent interior la cercul ω_2 în punctul T_2. Demonstraţi că dreptele X_1T_1 şi X_2T_2 se intersectează într-un punct de pe cercul ω.

Problema 5. Fie k şi n două numere întregi astfel încât $k \geq 2$ şi $k \leq n \leq 2k-1$. Aranjăm dreptunghiuri de dimensiuni $1 \times k$ sau $k \times 1$ pe o tablă de şah $n \times n$, astfel încât fiecare dreptunghi acoperă exact k pătrăţele şi nu există două dreptunghiuri care să aibă suprapuneri. Procedăm astfel până când nu se mai poate adăuga niciun dreptunghi. Pentru fiecare k şi n ca mai sus, determinaţi numărul minim de dreptunghiuri pe care le poate conţine o astfel de aranjare.

Problema 6. Fie S mulţimea numerelor naturale nenule n, astfel încât n^4 are cel puţin un divizor printre numerele n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n. Demonstraţi că S conţine o infinitate de numere din fiecare clasă de întregi de forma $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$ şi niciun element de forma $7m+3$ sau $7m+4$, unde m este un număr întreg.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte