Środa, 13. kwietnia 2016

Zadanie 4. Okręgi ω_1 i ω_2 mają równe promienie oraz przecinają się w różnych punktach X_1 i X_2. Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgu ω_1 w punkcie T_1, oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu ω_2 w punkcie T_2. Wykazać, że proste X_1T_1 oraz X_2T_2 przecinają się w punkcie leżącym na okręgu ω.

Zadanie 5. Niech k i n będą takimi liczbami całkowitymi, że $k \geqslant 2$ oraz $k \leqslant n \leqslant 2k-1$. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ ustawiamy prostokątne płytki, każda o wymiarach $1 \times k$ lub $k \times 1$, w taki sposób, by każda płytka pokrywała dokładnie k pól szachownicy oraz by żadne dwie różne płytki nie pokrywały tego samego pola. Kontynuujemy ustawianie aż do momentu, gdy nie da się już dostawić kolejnej płytki zgodnie z tymi regułami. Dla wszystkich takich k i n, wyznaczyć najmniejszą liczbę płytek jaka może występować w uzyskanym ustawieniu.

Zadanie 6. Niech S będzie zbiorem wszystkich takich dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba n^4 ma dzielnik wśród liczb n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n. Udowodnić, że w zbiorze S można znaleźć nieskończenie wiele elementów każdej z postaci $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$, lecz w S nie istnieje żaden element postaci $7m+3$ lub $7m+4$, gdzie m jest liczbą całkowitą.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów