Среда, 13 Април, 2016

Задача 4. Кружниците ω_1 и ω_2 имаат еднакви радиуси и се сечат во две различни точки X_1 и X_2. Кружницата ω е тангентна кон двете дадени кружници, при што кружницата ω_1 ја допира однадвор во точката T_1, а кружницата ω_2 ја допира одвнатре во точката T_2. Докажи дека правите X_1T_1 и X_2T_2 се сечат во точка која припаѓа на кружницата ω.

Задача 5. Нека k и n се цели броеви такви што $k \geq 2$ и $k \leq n \leq 2k-1$. На шаховска табла со димензии $n \times n$ поставуваме правоаголни плочки со димензии $1 \times k$ и $k \times 1$, така што секоја плочка препокрива точно k полиња од шаховската табла, и две поставени плочки не се преклопуваат. Плочки поставуваме се додека поставување на нова плочка не е можно. За секои k и n да се определи минималниот број на правоаголни плочки кои може да се постават на погоре опишаниот начин.

Задача 6. Нека S е множество од сите позитивни цели броеви n такви што n^4 е делив со некој од броевите $n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n$. Докажи дека во множеството S има бесконечно многу броеви од секој од облиците $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+5, 7m+6$, а во S нема броеви од облик $7m+3$ и $7m+4$, каде m е цел број.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Секоја задача се вреднува со 7 поени