mercoledì 13 aprile 2016

Problema 4. Due circonferenze aventi lo stesso raggio, ω_1 e ω_2, si intersecano in due punti distinti X_1 and X_2. Si consideri una circonferenza ω tangente esternamente a ω_1 nel punto T_1 e internamente a ω_2 nel punto T_2. Si dimostri che il punto d'intersezione fra le rette X_1T_1 e X_2T_2 giace su ω.

Problema 5. Siano k e n interi tali che $k \geq 2$ e $k \leq n \leq 2k-1$. Si dispongono su di una scacchiera $n \times n$ alcuni tasselli rettangolari, ciascuno di dimensioni $1 \times k$ o $k \times 1$, in modo tale che ogni tassello copra esattamente k caselle e che non vi siano sovrapposizioni. Si prosegue nel disporre tasselli fino a raggiungere una configurazione nella quale non è più possibile aggiungerne. Per ciascun k e n come sopra, si determini il numero minimo di tasselli necessario per raggiungere una tale configurazione.

Problema 6. Sia S l'insieme degli interi positivi n tali che n^4 abbia un divisore appartenente all'insieme $\{n^2+1,\ n^2+2,\ \ldots,\ n^2+2n\}$. Dimostrare che, sotto ciascuna delle forme $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$ e $7m+6$, con m intero, si possono esprimere infiniti elementi di S. Dimostrare inoltre che S non contiene elementi della forma $7m+3$ né della forma $7m+4$, con m intero.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti