Mittwoch, 13. April 2016

Aufgabe 4. Seien ω_1 und ω_2 zwei Kreise mit gleichem Radius, die sich in zwei verschiedenen Punkten X_1 und X_2 schneiden. Sei ω ein Kreis, der ω_1 von aussen im Punkt T_1 berührt und ω_2 von innen im Punkt T_2 berührt. Zeige, dass sich die Geraden X_1T_1 und X_2T_2 auf ω schneiden.

Aufgabe 5. Seien k und n natürliche Zahlen mit $k \geq 2$ und $k \leq n \leq 2k-1$. Lege einen $1 \times k$ oder $k \times 1$ Stein auf ein $n \times n$ Spielbrett, sodass dieser Stein genau k Einheitsquadrate bedeckt. Wiederhole dies, sodass keine Überlappungen entstehen, und bis keine weiteren Steine hinzugefügt werden können. Bestimme für jedes solche Paar (k, n) die Mindestanzahl von Steinen, die am Ende auf dem Spielbrett liegen.

Aufgabe 6. Sei S die Menge aller natürlicher Zahlen n, für welche n^4 einen Teiler in der Menge $\{n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n\}$ hat. Zeige, dass S von jeder der Formen $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$ jeweils unendlich viele Elemente enthält, aber keine Elemente der Form $7m+3$ oder $7m+4$, wobei m eine ganze Zahl ist.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.