Mercredi 13 avril 2016

Problème 4. Deux cercles ω_1 et ω_2 de même rayon se coupent en deux points distincts X_1 et X_2. On considère un cercle ω tangent extérieurement à ω_1 au point T_1 et tangent intérieurement à ω_2 au point T_2. Prouver que les droites X_1T_1 et X_2T_2 se coupent en un point appartenant à ω.

Problème 5. Soient k et n deux entiers tels que $k \geqslant 2$ et $k \leqslant n \leqslant 2k-1$. On place des pièces rectangulaires, chacune de taille $1 \times k$ ou $k \times 1$, sur un échiquier $n \times n$, de telle sorte que chaque pièce couvre exactement k cases et sans que deux pièces ne se chevauchent. On procède ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus ajouter de pièce de cette manière. Pour tous tels k et n, déterminer le nombre minimal de pièces qui peuvent constituer un tel recouvrement.

Problème 6. Soit S l'ensemble des entiers strictement positifs n tels que n^4 ait un diviseur parmi les nombres n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n. Prouver que l'ensemble S contient une infinité d'éléments de chacune des formes $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$, mais ne contient aucun élément de la forme $7m+3$ ou $7m+4$, où m est un entier.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points