

Keskiviikkona 13. huhtikuuta 2016

Tehtävä 4. Kaksi samansäteistä ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat toisensa kahdessa eri pisteessä X_1 ja X_2 . Tarkastellaan ympyrää ω , joka sivuaa ympyrää ω_1 ulkopuolelta pisteessä T_1 , ja joka sivuaa ympyrää ω_2 sisäpuolelta pisteessä T_2 . Osoita, että suorat X_1T_1 ja X_2T_2 leikkaavat toisensa pisteessä, joka sijaitsee ympyrän ω kehällä.

Tehtävä 5. Olkoot k ja n kokonaislukuja, joille $k \geq 2$ ja $k \leq n \leq 2k - 1$. Sijoitetaan $n \times n$ -šakkilaudalle suorakaiteen muotoisia laattoja, joista jokaisen mitat ovat joko $1 \times k$ tai $k \times 1$. Jokainen laatta peittää täsmälleen k ruutua, ja mitkään kaksi laattaa eivät mene päällekkäin. Tätä jatketaan, kunnes laudalle ei voi enää asettaa lisää laattoja tällä tavalla. Selvitä jokaisille k ja n , mikä on pienin mahdollinen määrä laattoja tällaisessa laatta-asetelmassa.

Tehtävä 6. Olkoon S niiden positiivisten kokonaislukujen n joukko, joille jokin luvuista $n^2 + 1$, $n^2 + 2$, \dots , $n^2 + 2n$ on luvun n^4 tekijä. Osoita, että joukossa S on äärettömän monta lukua, jotka ovat muotoa $7m$, äärettömän monta lukua muotoa $7m + 1$, äärettömän monta lukua muotoa $7m + 2$, äärettömän monta lukua muotoa $7m + 5$, sekä äärettömän monta lukua muotoa $7m + 6$, mutta ei ainuttakaan lukua, joka olisi muotoa $7m + 3$ tai $7m + 4$, missä m on kokonaisluku.