Сряда, 13 Април, 2016

Задача 4. Окръжностите ω_1 и ω_2 имат равни радиуси и се пресичат в точки X_1 и X_2. Окръжност ω се допира външно до ω_1 в точка T_1 и вътрешно до ω_2 в точка T_2. Да се докаже, че правите X_1T_1 и X_2T_2 се пресичат в точка върху окръжността ω.

Задача 5. Нека k и n са цели числа, за които $k \geq 2$ и $k \leq n \leq 2k-1$. Поставяме правоъгълни плочки с размери $1 \times k$ или $k \times 1$ на шахматна дъска $n \times n$ така, че всяка плочка покрива точно k клетки и плочките не се застъпват. Поставяме плочките до момент, в който не могат да се поставят повече плочки. За всички k и n да се намери минималният брой плочки, които могат да са поставени в този момент.

Задача 6. Нека S е множеството от естествени числа n, за които n^4 има делител измежду числата n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n. Да се докаже, че съществуват безбройно много елементи на S от всеки от видовете $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$ и не съществуват елементи на S от вида $7m+3$ или $7m+4$, където m е цяло число.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки