



Language: Russian

Day: 1

Вторник, 12 апреля 2016 г.

**Задача 1.** Пусть  $n$  – нечётное целое положительное число, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – неотрицательные действительные числа. Докажите, что

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

где  $x_{n+1} = x_1$ .

**Задача 2.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $X$ . Точки  $C_1, D_1$  и  $M$  – середины отрезков  $CX, DX$  и  $CD$  соответственно. Прямые  $AD_1$  и  $BC_1$  пересекаются в точке  $Y$ , а прямая  $MY$  пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$  в различных точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что прямая  $XY$  касается окружности, описанной около треугольника  $EFX$ .

**Задача 3.** Пусть  $m$  – целое положительное число. Дана таблица  $4m \times 4m$ , состоящая из единичных клеток. Две различные клетки назовём *родственными*, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Никакая клетка не является родственной для самой себя. Некоторые клетки были окрашены в синий цвет, при этом оказалось, что у каждой клетки таблицы не менее двух родственных ей синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество синих клеток.