



Language: Romanian

Day: 1

Marti, 12 aprilie 2016

Problema 1. Fie n un număr natural impar. Se consideră numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Demonstrați că:

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

unde $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil ale cărui diagonale AC și BD se intersectează în punctul X . Fie punctele C_1, D_1 și M mijloacele segmentelor CX, DX și, respectiv, CD . Dreptele AD_1 și BC_1 se intersectează în punctul Y , iar dreapta MY intersectează diagonalele AC și BD în punctele diferite E și, respectiv, F . Demonstrați că dreapta XY este tangentă cercului care trece prin punctele E, F și X .

Problema 3. Fie m un număr natural nenul. Considerăm un tabel format din $4m \times 4m$ pătrățele unitate. Două pătrățele diferite sunt *înrudite* dacă sunt pe aceeași linie sau pe aceeași coloană. Niciun pătrățel nu este înrudit cu el însuși. Unele pătrățele sunt colorate în albastru, astfel încât fiecare pătrățel este înrudit cu cel puțin două pătrățele albastre. Determinați numărul minim de pătrățele albastre.