Tirsdag 12. april 2016

Oppgave 1. La n være et positivt oddetall, og la x_1, x_2, $\ldots$, x_n være ikke-negative reelle tall. Vis at

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

der $x_{n+1} = x_1$.

Oppgave 2. La $ABCD$ være en syklisk firkant, og la diagonalene AC og BD skjæres i X. La C_1, D_1 og M være midtpunktene på henholdsvis CX, DX og CD. Linjene AD_1 og BC_1 skjæres i Y, og linjen MY skjærer diagonalene AC og BD i punktene henholdsvis E og F, med $E \neq F$. Vis at linjen XY tangerer sirkelen som går gjennom E, F og X.

Oppgave 3. La m være et positivt heltall. Betrakt et $4m \times 4m$-brett bestående av (enhets)felter. To forskjellige felter er *beslektet* med hverandre hvis de er i samme rad eller i samme kolonne. Intet felt er beslektet med seg selv. Noen av feltene farges blå, slik at hvert felt er beslektet med minst to blå felter. Bestem minste mulige antall blå felter.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng