



Language: Finnish

Day: 1

Tiistaina 12. huhtikuuta 2016

Tehtävä 1. Olkoon n pariton positiivinen kokonaisluku, ja olkoot x_1, x_2, \dots, x_n ei-negatiivisia reaalityyppisiä lukuja. Osoita, että

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

missä $x_{n+1} = x_1$.

Tehtävä 2. Olkoon $ABCD$ jänneleikkio, ja leikatkaa lävistäjät AC ja BD pisteessä X . Olkoot C_1 janan CX keskipiste, D_1 janan DX keskipiste, ja M janan CD keskipiste. Suorat AD_1 ja BC_1 leikkaavat pisteessä Y , ja suora MY leikkaa lävistäjää AC pisteessä E ja lävistäjää BD pisteessä F , missä E ja F ovat eri pisteitä. Osoita, että suora XY sivuaa pisteiden E, F ja X kautta kulkevaa ympyrää.

Tehtävä 3. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan yksikköneliön muotoisista ruuduista koostuvaa $4m \times 4m$ -taulukkoa. Kaksi eri ruutua *liittyvät* toisiinsa, jos ne ovat samalla rivillä tai samassa sarakkeessa. Mikään ruutu ei liity itseensä. Jotkin ruudut väritetään siniseksi niin, että jokainen ruutu liittyy ainakin kahteen siniseen ruutuun. Määritä pienin mahdollinen määrä sinisiä ruutuja.