Language: **Ukrainian**

Day: **1**

Вівторок, 12 квітня, 2016 р.

Задача 1. Нехай n – непарне натуральне число і $x_1, x_2, ..., x_n$ – невід'ємні дійсні числа. Доведіть, що

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

де $x_{n+1} = x_1$.

Задача 2. Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник, діагоналі AC і BD якого перетинаються у точці X. Через C_1, D_1 та M позначимо середини відрізків CX, DX та CD, відповідно. Нехай Y – точка перетину прямих AD_1 і BC_1, а пряма MY перетинає діагоналі AC і BD у різних точках E і F відповідно. Доведіть, що пряма XY є дотичною до кола, що проходить через точки E, F та X.

Задача 3. Нехай m – натуральне число. Розглянемо таблицю розміром $4m \times 4m$, що складається з одиничних клітинок. Дві різні клітинки назвемо *пов'язаними* одна до одної, якщо вони знаходяться в одному рядку або в одному стовпчику. Ніяка клітинка не є пов'язаною до самої себе. Деякі клітинки пофарбовані блакитним кольором так, що кожна клітинка дошки пов'язана хоча б з двома блакитними клітинками. Визначте найменшу можливу кількість блакитних клітнок.