Martes, 12 de abril de 2016

Problema 1. Sean: n un entero positivo impar, y $x_1, ..., x_n$ números reales no negativos. Demostrar que

$$\min_{i=1,\ldots,n} \left\{ x_i^2 + x_{i+1}^2 \right\} \leq \max_{j=1,\ldots,n} \left\{ 2x_j x_{j+1} \right\},$$

donde $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y X la intersección de las diagonales AC y BD. Sean C_1, D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX, DX y CD, respectivamente. Las rectas AD_1 y BC_1 se intersecan en Y, la recta MY interseca a las diagonales AC y BD en dos puntos distintos, que llamamos respectivamente E y F. Demostrar que la recta XY es tangente a la circunferencia que pasa por E, F y X.

Problema 3. Sea m un entero positivo. Se considera un tablero de $4m \times 4m$ casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están *relacionadas* si pertenecen ya sea a la misma fila o a la misma columna. Ninguna casilla está relacionada con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul de tal manera que cada casilla está relacionada con al menos dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos