Torek, 12. april 2016

Naloga 1. Naj bo n liho naravno število in naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativna realna števila. Pokaži, da velja

$$\min_{i=1,\ldots,n}\{x_i^2 + x_{i+1}^2\} \leq \max_{j=1,\ldots,n}\{2x_j x_{j+1}\},$$

kjer je $x_{n+1} = x_1$.

Naloga 2. Naj bo $ABCD$ tetiven štirikotnik in naj se diagonali AC in BD sekata v točki X. Središča daljic CX, DX in CD zaporedoma označimo s C_1, D_1 in M. Premici AD_1 in BC_1 se sekata v točki Y, premica MY pa zaporedoma seka diagonali AC in BD v dveh različnih točkah E in F. Dokaži, da je premica XY tangenta na krožnico skozi E, F in X.

Naloga 3. Naj bo m naravno število. Oglejmo si $4m \times 4m$ tabelo sestavljeno iz enotskih celic. Za dve različni celici pravimo, da sta *sorodni*, če ležita v isti vrstici ali v istem stolpcu. Nobena celica ni sorodna sama sebi. Nekaj celic pobarvamo modro tako, da je vsaka celica sorodna vsaj dvema modrima celicama. Določi najmanjše možno število modrih celic.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk.