

Вторник, 12 апреля 2016 г.

Задача 1. Пусть n – нечётное целое положительное число, а x_1, x_2, \dots, x_n – неотрицательные действительные числа. Докажите, что

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

где $x_{n+1} = x_1$.

Задача 2. Диагонали AC и BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X . Точки C_1, D_1 и M – середины отрезков CX, DX и CD соответственно. Прямые AD_1 и BC_1 пересекаются в точке Y , а прямая MY пересекает диагонали AC и BD в различных точках E и F соответственно. Докажите, что прямая XY касается окружности, описанной около треугольника EFX .

Задача 3. Пусть m – целое положительное число. Дана таблица $4m \times 4m$, состоящая из единичных клеток. Две различные клетки назовём *родственными*, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Никакая клетка не является родственной для самой себя. Некоторые клетки были окрашены в синий цвет, при этом оказалось, что у каждой клетки таблицы не менее двух родственных ей синих клеток. Найдите наименьшее возможное количество синих клеток.