Marţi, 12 aprilie 2016

Problema 1. Fie n un număr natural impar. Se consideră numerele reale $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geq 0$. Demonstraţi că:

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2+x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n}(2x_jx_{j+1}),$$

unde $x_{n+1}=x_1$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil ale cărui diagonale AC şi BD se intersectează în punctul X. Fie punctele C_1, D_1 şi M mijloacele segmentelor CX, DX şi, respectiv, CD. Dreptele AD_1 şi BC_1 se intersectează în punctul Y, iar dreapta MY intersectează diagonalele AC şi BD în punctele diferite E şi, respectiv, F. Demonstraţi că dreapta XY este tangentă cercului care trece prin punctele E, F şi X.

Problema 3. Fie m un număr natural nenul. Considerăm un tabel format din $4m \times 4m$ pătrăţele unitate. Două pătrăţele diferite sunt *înrudite* dacă sunt pe aceeaşi linie sau pe aceeaşi coloană. Niciun pătrăţel nu este înrudit cu el însuşi. Unele pătrăţele sunt colorate în albastru, astfel încât fiecare pătrăţel este înrudit cu cel puţin două pătrăţele albastre. Determinaţi numărul minim de pătrăţele albastre.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte