Wtorek, 12. kwietnia 2016

Zadanie 1. Niech n będzie dodatnią liczbą nieparzystą, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że

$$\min_{i=1,\ldots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n}(2x_j x_{j+1}),$$

gdzie oznaczamy $x_{n+1} = x_1$.

Zadanie 2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, zaś jego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie X. Punkty C_1, D_1 oraz M są odpowiednio środkami odcinków CX, DX oraz CD. Proste AD_1 oraz BC_1 przecinają się w punkcie Y, zaś prosta MY przecina przekątne AC i BD odpowiednio w punktach E i F, przy czym $E \neq F$. Wykazać, że prosta XY jest styczna do okręgu przechodzącego przez punkty E, F oraz X.

Zadanie 3. Dana jest dodatnia liczba całkowita m. Rozważmy tablicę o wymiarach $4m \times 4m$ składającą się z komórek będących kwadratami jednostkowymi. Dwie różne komórki nazwiemy *stowarzyszonymi*, jeśli znajdują się one w tym samym wierszu bądź w tej samej kolumnie. Żadna komórka nie jest stowarzyszona sama ze sobą. Niektóre komórki pokolorowano na niebiesko w taki sposób, że każda komórka tablicy jest stowarzyszona z co najmniej dwoma niebieskimi komórkami. Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę komórek pokolorowanych na niebiesko.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów