

2016 m. balandžio 12 d., antradienis

1 uždavinys. Duoti nelyginis natūralusis skaičius n ir neneigiami realieji skaičiai x_1, x_2, \dots, x_n . Įrodykite, kad

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}).$$

Čia $x_{n+1} = x_1$.

2 uždavinys. Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą, įstrižainės AC ir BD kertasi taške X . Atkarpų CX , DX ir CD vidurio taškai atitinkamai pažymėti C_1 , D_1 ir M . Tiesės AD_1 ir BC_1 kertasi taške Y , o tiesė MY kerta įstrižaines AC ir BD atitinkamai (skirtinguose) taškuose E ir F . Įrodykite, kad tiesė XY liečia apskritimą, einantį per taškus E , F ir X .

3 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius m . Nagrinėkime kvadratinę lentą, sudarytą iš $4m \times 4m$ vienetinių langelių. Du skirtingi langeliai yra *giminingi*, kai jie yra vienoje eilutėje arba viename stulpelyje. Langelis nėra giminingas pats sau. Kai kurie langeliai nudažyti mėlynai. Bet kuris langelis giminingas mažiausiai dviem mėlyniams. Nustatykite, kiek mažiausiai langelių galėjo būti nudažyta.